Hüllflächen und assoziierte Kurven in der räumlichen Kinematik

Herrn Professor Dr. Hans Robert Müller zum achtzigsten Geburtstag

Meyer, Peter

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 42, 1990/91, S.43-47

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Hüllflächen und assoziierte Kurven in der räumlichen Kinematik

Herrn Professor Dr. Hans Robert Müller
zum achtzigsten Geburtstag

Von **Peter Meyer,** Braunschweig

Abstract:

On Sliding Surfaces and Associated Curves in Spatial Kinematics

Sliding surfaces in spatial kinematics are immensely important in practical kinematics and especially in mechanisms. Basic theoretical ideas are published in [1] and [2]. In the following paper the equivalence of three differential equations of sliding surfaces and of associated curves in the sense of *G. Koenigs* will be shown by means of the characteristic theory of systems of partial differential equations with the same principal part. The results can easily be generalized to any finite dimensions.

In den Anwendungen der Kinematik treten häufig kinematisch erzeugte Hüllflächenpaare auf. Diese Untersuchungen gehen unter anderen zurück auf *H. R. Müller* [1] und *J. Hoschek* [2]. Entsprechendes Rollgleiten von Kurvenpaaren in der Ebene und auf der Kugel wurde von *H. R. Müller* insoweit geklärt, als die Fragestellung nach allen rollgleitenden Kurvenpaaren bei gegebener Rollgleitzahl auf eine gewöhnliche Differentialgleichung führt [3],[4]. Bei dem analogen räumlichen Problem stieß *H. R. Müller* [1] auf ein System aus drei linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung und zeigte geometrischen Gesichtspunkten folgend, daß sich dieses System auf eine partielle nichtlineare *„Riccatische"* Differentialgleichung transformieren läßt.

Es soll hier gezeigt werden, daß das lineare partielle Differentialgleichungssystem sogar zu einem linearen gewöhnlichen Differentialgleichungssystem äquivalent ist. Hiermit im Zusammenhang steht eine Charakteristikentheorie für partielle Differentialgleichungen mit *gleichem Hauptteil*[1]), die zu einer einfachen kinematischen Interpretation führt.

Wie in [1] liege ein zwangläufiger Bewegungsvorgang des Gangsystems $\{0;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ gegenüber dem Rastsystem $\{0';\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_3'\}$ vor, der sich mit einer orthogonalen Matrix $\left(a_{ik}(t)\right) \in C^1$, $i,k=1,2,3$, und einem Schiebvektor $\mathbf{u}(t) \in C^1$ beschreiben läßt:

$$\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\,\mathbf{e}_k', \quad i=1,2,3, \quad \overrightarrow{0'0} = \mathbf{u}.$$

[1]) Vergleiche [5], S. 117 ff. und [7].

Dann ist die momentane Schraubachse $(\omega(t), \bar{\omega}(t))$ festgelegt durch

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \omega \times \mathbf{e}_i, \quad i = 1,2,3, \quad \dot{\mathbf{u}} = \bar{\omega}.$$

Bei Vorgabe zweier verallgemeinerter Rollgleitzahlen $P, Q \in C$ stellte *H. R. Müller* [1] für eine Parametrisierung $\mathbf{x}(t,u)$ einer im Gangsystem befestigten Fläche, die im Rastsystem eine weitere Fläche einhüllt, folgendes lineares partielles Differentialgleichungssystem auf:

$$P(t,u) \cdot \mathbf{x}_t + Q(t,u) \cdot \mathbf{x}_u = \omega \times \mathbf{x} + \bar{\omega}. \tag{1}$$

Für festes t beschreibt hierbei $\mathbf{x}(t,u)$ abhängig von u die augenblickliche *Berührungscharakteristik* des Hüllflächenpaares. (1) ist ein spezielles System mit gleichem Hauptteil, das heißt: die Koeffizienten P und Q treten in jeder der drei Gleichungen des Systems auf. (1) gestattet daher die kinematische Deutung: Die Richtungsableitung $P \cdot \mathbf{x}_t + Q \cdot \mathbf{x}_u$ von $\mathbf{x}$ in Richtung des Vektors (P, Q) ist gleich der Führungsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}_F := \omega \times \mathbf{x} + \bar{\omega}$ von $\mathbf{x}$. Für solche Systeme besteht

Satz 1: *Das System* (1) *mit gleichem Hauptteil ist äquivalent einer homogenen linearen partiellen Differentialgleichung* 1. *Ordnung für eine Funktion*

$$\varphi : R^5 \to R :$$
$$P \cdot \varphi_t + Q \cdot \varphi_u + (\omega \times \mathbf{x} + \bar{\omega}) \cdot \mathbf{grad}\, \varphi = 0 \tag{2}$$
$$\mathbf{grad}\, \varphi := (\varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_{x_3}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

Diese Äquivalenz besagt, daß jede implizite Lösung $\varphi(t,u;\mathbf{x}) = 0$ von (1) auch Lösung von (2) ist und umgekehrt[2]). Auf die Differentialgleichung (2) läßt sich die *Charakteristikentheorie* für Differentialgleichungen 1. Ordnung anwenden: (2) ist äquivalent mit dem charakteristischen System:

$$\frac{dt}{ds} = P(t,u) \qquad \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \omega \times \mathbf{x} + \bar{\omega} \qquad \frac{du}{ds} = Q(t,u) \tag{3}$$

(s bezeichnet einen Kurvenparameter der Charakteristiken).

Somit ergibt sich:

Satz 2: *Das System* (1) *mit gleichem Hauptteil ist äquivalent dem gewöhnlichen Differentialgleichungssystem* (3).

Das System (3) zerfällt in das Teilsystem

$$\frac{dt}{ds} = P(t,u), \qquad \frac{du}{ds} = Q(t,u), \tag{4}$$

das prinzipiell für sich gelöst werden kann, und das Restsystem

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \omega \times \mathbf{x} + \bar{\omega}. \tag{5}$$

2) Der Beweis zu Satz 1 findet sich in [5], S. 117ff.

Die Lösungen von (4) setzen wir in (5) ein und erhalten ausführlich

$$\frac{d}{ds}\mathbf{x}\left(t(s),u(s)\right)=\omega\left(t(s)\right)\times\mathbf{x}\left(t(s),u(s)\right)+\bar{\omega}\left(t(s)\right). \tag{6}$$

Definition: *Im Hinblick auf Satz 2 heiße* (6) *das charakteristische Differentialgleichungssystem zu* (1). *Die Lösungskurven von* (6) *sollen Charakteristiken von* (1) *heißen.*

Für diese Charakteristiken des Differentialgleichungssystems (1) läßt sich eine kinematische Deutung geben:

Der Übergang von (1) zu (5) kann auch durch eine Variablentransformation erreicht werden. Sei

$$\xi=\xi(t,u),\quad \eta=\eta(t,u),\quad \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(t,u)}\neq 0 \tag{7}$$

eine Transformation, und

$$\mathbf{y}(\xi,\eta):=\mathbf{x}(t,u),$$

so wird mit

$$\mathbf{x}_t=\mathbf{y}_\xi\cdot\xi_t+\mathbf{y}_\eta\cdot\eta_t,\quad \mathbf{x}_u=\mathbf{y}_\xi\cdot\xi_u+\mathbf{y}_\eta\cdot\eta_u$$

die Differentialgleichung (1) zu

$$(P\cdot\xi_t+Q\cdot\xi_u)\,\mathbf{y}_\xi+(P\cdot\eta_t+Q\cdot\eta_u)\,\mathbf{y}_\eta=\omega\times\mathbf{y}+\bar{\omega}. \tag{8}$$

Wir wählen zunächst η so, daß die Differentialgleichung

$$P(t,u)\cdot\eta_t+Q(t,u)\cdot\eta_u=0 \tag{9}$$

besteht, und lösen für $P(t,u)\neq 0$ die zugehörige gewöhnliche Differentialgleichung der Charakteristiken

$$\frac{du}{dt}=\frac{Q(t,u)}{P(t,u)}. \tag{10}$$

Im Fall $P\neq 0$ sind (4) und (10) äquivalent. Sei $\eta(t,u)=c$, $c\in\mathbb{R}$, und $\eta_u\neq 0$ eine Lösung von (10), folglich auch Lösung von (9). Die transformierte Differentialgleichung (8) vereinfacht sich zu

$$(P\cdot\xi_t+Q\cdot\xi_u)\,\mathbf{y}_\xi=\omega\times\mathbf{y}+\bar{\omega}. \tag{11}$$

Für die Variable ξ wählen wir speziell

$$\xi(t,u)=t \tag{12}$$

und gewährleisten so die Umkehrbarkeit der Transformation (7) wegen

$$\xi_t\cdot\eta_u-\xi_u\cdot\eta_t=1\cdot\eta_u\neq 0.$$

Die Differentialgleichung (1) nimmt über (8) und (11) folgende endgültige Gestalt an:

$$P\left(t,u(t,\eta)\right)\cdot\mathbf{y}_t=\omega(t)\times\mathbf{y}+\bar{\omega}(t). \tag{13}$$

Für festes η ist (13) ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem.

Andererseits impliziert das charakteristische System ebenfalls (13): Wegen $P \neq 0$ folgt aus (3) zunächst (10), und daraus ergibt sich $u(t)$, sowie

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \frac{1}{P}(\omega \times \mathbf{x} + \bar{\omega}), \text{ also} \\ P(t,u) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \omega \times \mathbf{x} + \bar{\omega}. \end{aligned} \tag{14}$$

Substituieren wir in (14) $u(t,\eta)$ gemäß der Transformation (7), so wird die gewöhnliche Ableitung in (14) zu einer partiellen Differentation, und (14) geht in (13) über.

Die Differentialgleichung (13) ist für festes η nach *G. Koenigs*[3]) kennzeichnend für *assoziierte Kurven:* das sind Gleitkurvenpaare, die bei dem zugrunde liegenden Bewegungsvorgang aneinander rollgleiten mit der Rollgleitzahl $P(t,u(t,\eta))$. Diese Rollgleitzahl bei assoziierten Kurven untersuchte auch *J. Tölke* [6] und fand für sie eine geometrische Interpretation als Doppelverhältnis. Somit resultiert:

Satz 3: *Die Charakteristiken des Systems* (1) *für Hüllflächen sind genau die assoziierten Gleitkurven von G. Koenigs.*

Aus dem Sachverhalt, daß die Differentialgleichung (13) der assoziierten Kurven sich einerseits aus der Differentialgleichung (1) für Hüllflächen, andererseits aus dem charakteristischen System (3) folgern läßt, ergibt sich:

Satz 4: *Flächenpaare sind genau dann Hüllflächen* (*Lösungen von* (1)), *wenn sie überdeckt sind mit einparametrigen Scharen assoziierter Kurven* (*Lösungen von* (13)).

Beweis: Diese kennzeichnende Eigenschaft für Hüllflächen resultiert aus der Umkehrbarkeit der Transformation (7), (12).

Es sei darauf hingewiesen, daß die Äquivalenz des Systems (1) mit gleichem Hauptteil und der homogenen Differentialgleichung (2) und des charakteristischen Systems (3) auch für die Frage nach Hüllhyperflächen in Räumen höherer Dimension bestehen bleibt. Hierbei treten als Koenigs'sche charakteristische Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension dann Kurvenscharen, Flächenscharen, Hyperflächenscharen auf, welche die Hüllhyperflächen überdecken[4]).

3) G. Koenigs, Mémoire sur les courbures conjugées dans le mouvement relatif le plus général de deux corps solides (1910). Veröffentlicht in Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences 35, 2 sér., Paris, 1914.

4) Vergleiche auch [5], S. 57/58.

Literaturverzeichnis

[1] H.R. Müller: Zur Ermittlung von Hüllflächen in der räumlichen Kinematik. Monatshefte für Mathematik, Band 63, 1959, S. 231–240.
[2] J. Hoschek: Zur Ermittlung von Hüllflächen in der räumlichen Kinematik. Monatshefte für Mathematik, Band 69, 1965, S. 393–406.
[3] H.R. Müller: Zur Kinematik des Rollgleitens. Archiv der Mathematik, 1953, S. 239–246.
[4] H.R. Müller: Zur Kinematik des Rollgleitens II. Archiv der Mathematik, 1955, S. 471–480.
[5] R. Courant, D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik II. Springer Verlag, 1968, 2. Auflage, Berlin / Heidelberg / New York.
[6] J. Tölke: The Roll-Sliding Number of Associated Curves. Mechanism and Machine Theory, Vol. 11, 1976, S. 419–423.
[7] H.R. Cooley: Remarks on the Initial Value Problem of the General Partial Differential Equation of the First Order. Bulletin American Mathematical Society, Vol. 43, 1937, S. 862–868.